Probleme und Beispiele aus der Zuverlässigkeitstheorie

Manfred Borovcnik, Klagenfurt

Kurzfassung: Im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie kann man den Begriff Wahrscheinlichkeit durchaus in fiktiver Weise durch Häufigkeiten deuten; andererseits ist in der Zuverlässigkeit der Begriff des Risikos allgegenwärtig, welcher eigentlich an der Basis eines Wahrscheinlichkeitsbegriffs ohne Bezug zu relativen Häufigkeiten steht. Der Szenariogedanke, der für den Wahrscheinlichkeitsbegriff so wesentlich ist, damit ist das Durchspielen von Wahrscheinlichkeitsmodellen gemeint unter dem Blickpunkt "was wäre, wenn ..?", ist gerade in der Zuverlässigkeitstheorie für die Deutung der Modelle wesentlich. Darüber hinaus ergeben sich einige wichtige neue Begriffe, die im üblichen Zugang zur Wahrscheinlichkeit und im stromlinienförmigen Aufbau der Theorie keine Rolle spielen; sie vernetzen jedoch die Begriffe neu und lassen auch den Begriff Wahrscheinlichkeit vertieft verstehen. Als Nebenprodukt ist anzusehen, daß einige Verteilungen, die sonst kaum zu rechtfertigen und zu motivieren sind, sehr wichtig werden.

1. Grundbegriffe aus der Sicht der Zuverlässigkeit

a) Ausfalldichte und mittlere Lebensdauer

Alle Begriffe werden hier exemplarisch an der Exponentialverteilung illustriert, das bedeutet aber keine Einschränkung.

- *Ausfalldichte*

Eine exponentialverteilte Zufallsvariable, in Zeichen $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, hat folgende einfache Dichtefunktion

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}, \quad x > 0,\ \lambda > 0$$

Die folgenden Figuren in Abb. 1 zeigen i) die Dichte selbst, ii) die Wahrscheinlichkeit über einem Intervall (a,b) sowie iii) die näherungsweise Wahrscheinlichkeit über dem Intervall $(x, x+\Delta x)$. In der Zuverlässigkeit werden mit Wahrscheinlichkeitsmodellen u.a. Lebensdauern (von technischen Systemen bzw. Einzelbauteilen) beschrieben. Dabei wird die Lebensdauer eines Bauteils als zufällig betrachtet, also durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte beschrieben. Das Modell der Exponentialverteilung selbst entspricht der Vorstellung von "rein zufällig" im Zeitablauf sich ereignenden Ausfällen (und damit bestimmten Lebensdauern). Rein zufällig meint damit, daß die sogenannte Wartezeit auf den nächsten Ausfall immer noch nach der Exponentialverteilung beschrieben wird, auch wenn man schon einige Zeit "vergeblich" gewartet hat.

Die in Abb. 1 schraffierten Wahrscheinlichkeiten ii) und iii) können einfach durch folgendes Szenario gedeutet werden: Wenn man in einem sogenannten Lebensdauerversuch eine große

Zahl (z.B. N=1000) von Bauteilen unter identischen Bedingungen der Belastung aussetzt, so kann man davon ausgehen, daß etwa eine Zahl von Bauteilen in der Zeit zwischen a und b ausfällt, die dem schraffierten Anteil ii) entspricht. Die Prognose für ein kleines Intervall nach dem Zeitpunkt x ist entsprechend in iii) dargestellt. Zu erwarten bedeutet dabei in ganz natürlicher Weise einen Richtwert, von dem die tatsächliche Anzahl der Ausfälle mehr oder weniger abweichen wird. Mit diesem Richtwert werden Vorausberechnungen für die Ausfälle für größere Anzahlen von Bauteilen ermöglicht. Eine solche Vorausrechnung soll aber auch die Einschätzung des Risikos eines Bauteiles, einen bestimmten Zeitraum nicht zu überleben, ermöglichen.

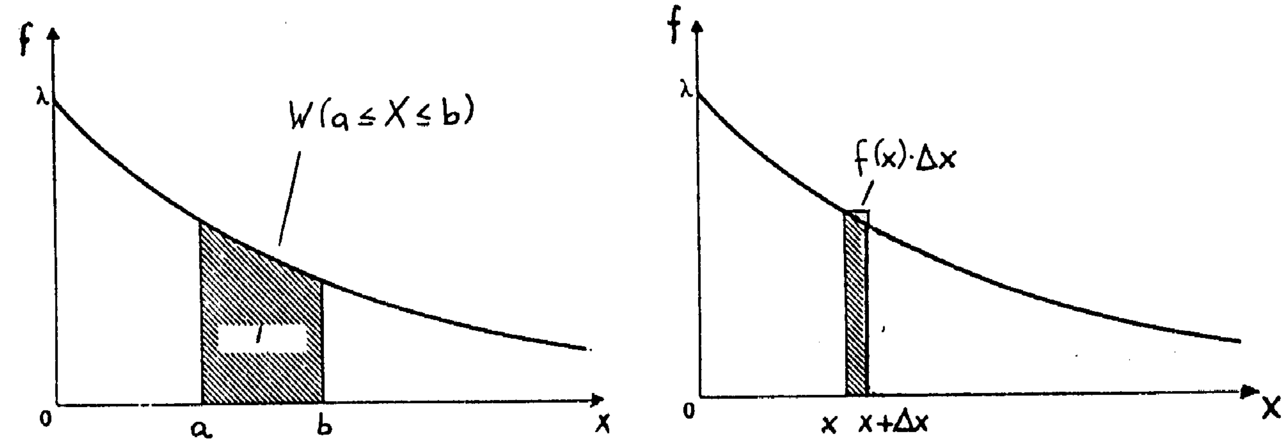

Abb. 1: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Exponentialverteilung - Bestimmtes Integral als Wahrscheinlichkeit des Intervalls - $f(x) \cdot \Delta x$ schätzt Ausfälle nahe x

- *Mittlere Lebensdauer*

Für die Exponentialverteilung ergibt sich der Erwartungswert zu $\frac{1}{\lambda}$, die Varianz ist auch nur vom Parameter λ abhängig:

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\sigma = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Wie für die Einzelwahrscheinlichkeiten gilt auch für die Parameter die Szenario-Deutung als Richtwert für die Zukunft im Sinne der "was wäre, wenn die Lebensdauer tatsächlich durch eine Exponentialverteilung modellierbar wäre". Die durchschnittliche Lebensdauer einer größeren Anzahl von Bauteilen wäre danach durch den Erwartungswert $\frac{1}{\lambda}$ als Richtwert abzuschätzen.

Diesem Erwartungswert kommt mehr die Funktion der Schätzung des Modellparameters λ zu (damit fixiert man das Modell) als einem Richtwert, dem man direkt eine Aussage über "mittlere" Lebensdauer der untersuchten Bauteile entnimmt. Der Erwartungswert ist ja nur für mehr oder weniger ausgeprägt eingipfelige Verteilungen einfach zu interpretieren, die Exponentialverteilung ist, wie viele andere Verteilungen in der Zuverlässigkeitstheorie ohne Gipfel (oder extrem schief).

Aus einem Lebensdauerversuch kann man also das Modell herausfiltern. Für die Beurteilung von Risiken, sei es für einzelne Bauteile oder für mehrere wird dann die Berechnung bestimmter Ausfallwahrscheinlichkeiten auf der Basis des Modells wesentlicher als die Interpretation des Erwartungswerts. Als ein Beispiel sei die Berechnung der Garantiezeit angeführt: Die Lebensdauer von Kühlventilatoren sei exponentialverteilt mit einer durchschnittlichen Lebensdauer von 28700 [Stunden]. Man dachte zunächst an eine Garantiezeit von 8000 [Stunden]. Aus der Exponentialverteilung ergibt eine kurze Rechnung die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall bis zu 8000 Stunden Betriebszeit von 0.24; das würde bedeuten, daß etwa ein Viertel der verkauften Ventilatoren unter die Garantiereklamationen fallen würden. Entweder kann man die technischen Bauteile verbessern, oder die Lebensdauer dadurch erhöhen, daß man kritische Bauteile doppelt einbaut (solche Fragen werden im Zusammenhang mit der Untersuchung von Netzwerken untersucht), oder man muß die Festsetzung der Garantiezeit überdenken. Für eine Darstellung der Zuverlässigkeit von komplexen Systemen sei z.B. auf Billinton und Allan, 1983, verwiesen.

b) Ausfall- und Überlebenskurven, P-Quantile

Neben der Ausfalldichte tauchen in der Zuverlässigkeitstheorie nicht nur aus rechnerischen Gründen sofort auch die Verteilungsfunktion und die dazu komplementäre Verteilungsfunktion auf: Diese Funktionen beschreiben die Wahrscheinlichkeit für einen Ausfall eines Bauteils bis zu einem bestimmten Zeitpunkt bzw. die Zuverlässigkeit, diesen Zeitpunkt zu überleben. Darüber hinaus finden sog. P-Quantile der Verteilung Anwendung: das sind jene Zeitpunkte, bis zu denen ein bestimmter Anteil P von Bauteilen ausfallen wird; auf ein Bauteil bezogen ist dies jener Zeitpunkt, den das Bauteil mit Wahrscheinlichkeit P nicht überleben wird.

- *Verteilungsfunktion*

Der Zusammenhang zwischen Dichtefunktion (i.e. die Wahrscheinlichkeitsdichte) und der sog. Verteilungsfunktion ist gleich wie zwischen einer beliebigen (integrierbaren) Funktion und deren Stammfunktion (siehe Abb.2). Der Zuwachs der Stammfunktion F zwischen den Zeitpunkten x und $x + \Delta x$ bedeutet hier die Anzahl der Neuausfälle in diesem "kleinen" Intervall der Länge Δx; diese Anzahl schätzten wir schon in Abb. 1 durch $f(x) \cdot \Delta x$, was der üblichen Deutung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gleich kommt:

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx \qquad f(x_0) = \left[\frac{d}{dx} F(x)\right]_{x = x_0}$$

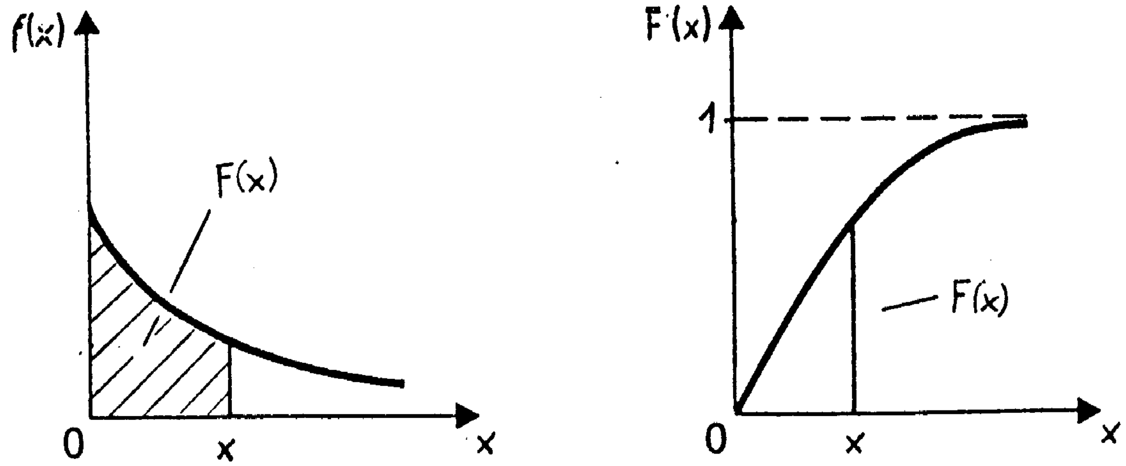

Abb. 2: Verteilungsfunktion als bestimmtes Integral der Dichtefunktion

Für die Exponentialverteilung ergibt sich als Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Für $\lambda = 28700$ war die Wahrscheinlichkeit von Garantiefällen gleich dem Wert F(8000) = 0.24.

- *Überlebensfunktion*

Bei der Untersuchung der Zuverlässigkeit von komplizierten technischen Geräten (bis hin zu einem Kernkraftwerk) geht es um Überlebenswahrscheinlichkeiten in bestimmten Zeiträumen. Basis hierfür ist die Bewertung der Zuverlässigkeit von einzelnen Bauteilen oder einfacheren Geräten. Unterstellt man hierfür ein Wahrscheinlichkeitsmodell in Form einer Dichtefunktion, so erhält man durch Integration die Verteilungsfunktion und somit die Wahrscheinlichkeit, bis zu einem Zeitpunkt x auszufallen. Die Gegenwahrscheinlichkeit ist gleichermaßen die gesuchte Zuverlässigkeit (für den Zeitpunkt x). Die Überlebensfunktion $R(x)$ gibt den funktionalen Zusammenhang wieder (R steht für *reliability*):

$$R(x) = 1 - F(x)$$

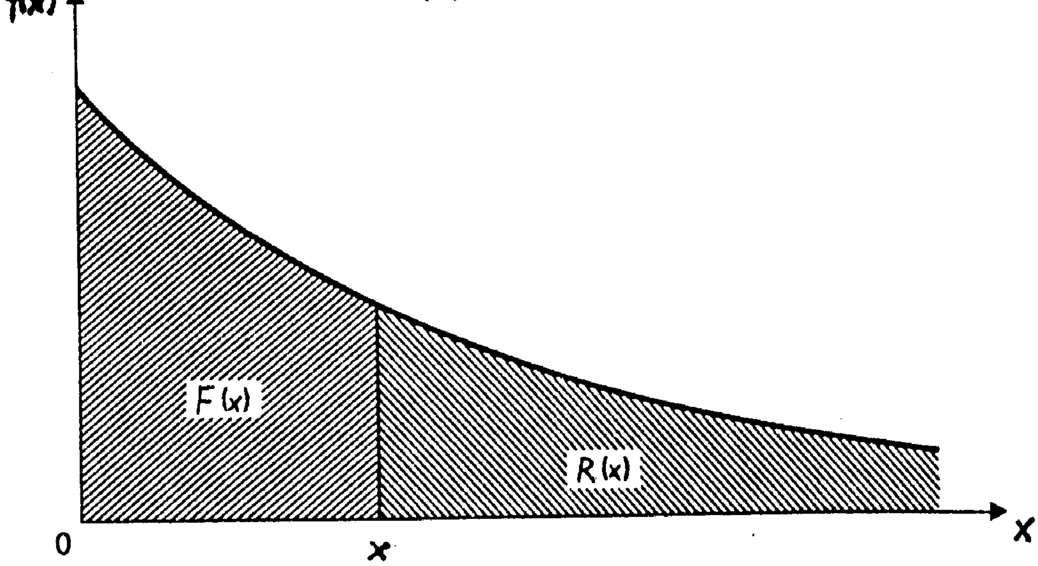

Abb. 3: Verteilungsfunktion und Überlebensfunktion ergänzen einander auf 1

Abb. 3 zeigt den Zusammenhang graphisch. Für die Exponentialverteilung ergibt sich mit $R(x) = e^{-\lambda x}$ eine exponentielle Abnahme der Zuverlässigkeit mit der (geforderten) Lebensdauer, die Abnahme erfolgt dabei umso rascher, je größer λ ist.

- *Prozentpunkte*

Im Kontext der Zuverlässigkeitstheorie wird auch die Umkehrfunktion zur Verteilungsfunktion wichtig. Bis zu welchem Zeitpunkt x_P sollte man mit 100 P % Ausfällen rechnen? Man gibt sich das Risiko in Form einer Wahrscheinlichkeit vor und sucht jenen Zeitpunkt, bei dem dieses zutrifft. In der üblichen Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie handelt es sich hierbei um P-Quantile (oder auch P-Fraktile).

$$F(x_P) = P$$

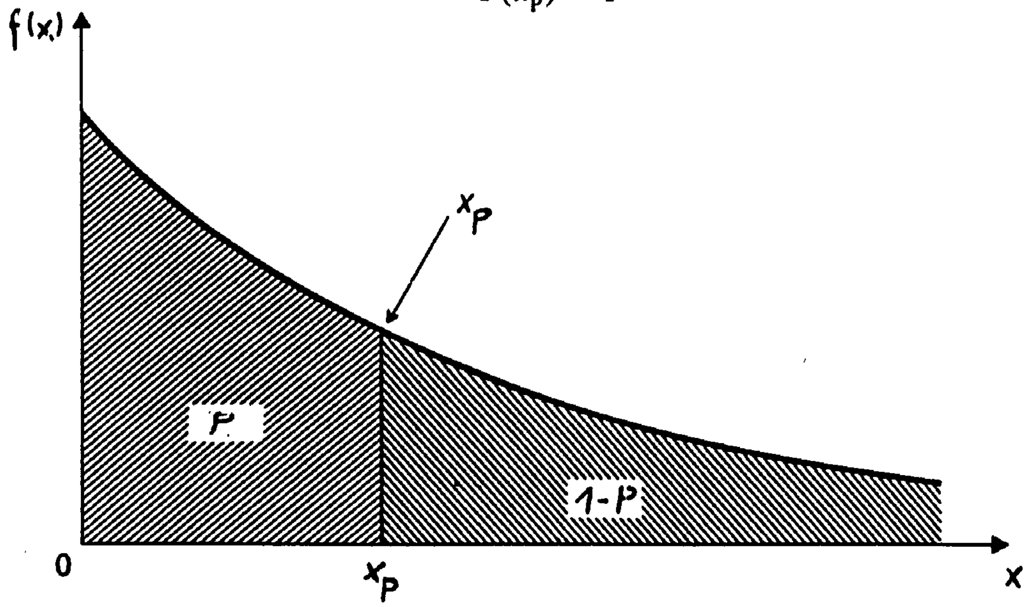

Abb. 4: P-Quantil teilt Fläche unter der Dichte im Verhältnis P zu 1-P

Für die Exponentialverteilung ergibt sich $x_P = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-P)$. Abb. 4 zeigt die definierende Bedingung für den 100 P-Prozentpunkt einer Verteilung.

c) Hazard-Funktion

- *Schlüsselbegriffe einer Theorie als Angelpunkt zwischen Realität und Modell*

In der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist die (stetige oder diskrete) Dichtefunktion der zentrale Begriff, um den sich alles gruppiert. Entsprechend wird dieser Begriff zur Schlüsselstelle zwischen Realität (wo die Phänomene und Fragen anzusiedeln sind) und Theorie (wo die Modelle anzusiedeln sind). Für die Anpassung eines Modells wird die Dichtefunktion genommen, sie muß, um die Güte der Modellbildung zu verbessern, mit Sachwissen festgelegt werden. Dazu dient auch ein globales Interpretationsmuster von Wahrscheinlichkeit wie die Deutung von Flächen unter der Dichte als relative Häufigkeit in einer größeren Serie von Zufallsversuchen. Dazu dienen aber auch innermathematische Zusammenhänge wie "Zerlegung und Zusammenbau" einer

Binomialverteilung durch eine Bernoulli-Kette, in der n unabhängige Versuche mit den Ausgängen 0 bzw. 1 (die Treffer) mit konstanter Trefferwahrscheinlichkeit p unternommen werden. Diese Modell-Bausteine und ihr Zusammenbau können dann ihrerseits (ohne die Häufigkeitsdeutung von Wahrscheinlichkeit) eine Einsicht bieten, ob eine Binomialverteilung vorliegen sollte oder nicht.

Für die Exponentialverteilung wird in Abschnitt 3 ein solcher innermathematischer Zusammenhang zur Poissonverteilung und zum Poissonprozeß dargestellt. Das führt zu einer anderen Schnittstelle zwischen Modell und Realität und entsprechend zu einer anderen Möglichkeit, diese Schnittstelle zu bewerten. Für bestimmte Verteilungen können hiermit über solche innermathematischen Zusammenhänge tiefere Einsichten erschlossen werden. Dadurch wird die übliche Überprüfung einer Verteilung durch die Daten (relativen Häufigkeiten) einer Versuchsserie wesentlich verbessert. Man kennt nämlich aufgrund der angeführten mathematischen Zusammenhänge wichtige Eigenschaften, die der Entstehungsprozeß der Daten eigentlich erfüllen müßte; diese Eigenschaften sind durch die Kenntnis des Kontexts (in der Zuverlässigkeitstheorie etwa durch Kenntnisse von Materialeigenschaften etc.) oft leichter zu überprüfen.

Quer zu allen Verteilungen, die in der Zuverlässigkeitstheorie in Frage kommen (das sind alle Verteilungen, die nur den Bereich der positiven reellen Zahlen mit positiven Wahrscheinlichkeiten ausstatten), gibt es aber einen weiteren Schlüsselbegriff, die sogenannte Hazardfunktion. Diese wird zunächst aus dem Begriff der Dichtefunktion abgeleitet, wird aber zur eigentlichen Schnittstelle zwischen Modell und Realität, nicht nur weil man in bestimmten Lebensdauerversuchen die Dichtefunktion des Modells nicht direkt sondern nur über diese Hazardfunktion schätzen kann. Vielmehr wird der Begriff des Hazards zum Angelpunkt der Vorstellungen, die man mit Zuverlässigkeit und Wahrscheinlichkeit verbindet.

- *Globales und lokales Hazard*

Zu Beginn eines Lebensdauerversuchs kann man aus dem Modell für die Lebensdauer in Form der Wahrscheinlichkeitsdichte voraussagen, wie viele Ausfälle im Zeitpunkt x, oder genauer, zwischen x und $x + \Delta x$, also in der kleinen Zeitspanne Δx ausfallen werden. Das mag für den Lebensdauerversuch ausreichen, in der Praxis steht man aber auch vor der Frage, wie groß die Ausfallwahrscheinlichkeit in der Zeitspanne Δx ist, *wenn* das Bauteil schon x Zeiteinheiten alt ist. Es ist durchaus möglich, daß die Ausfallwahrscheinlichkeit alterungsabhängig ist. Die lokale, altersbedingte Intensität, auszufallen, die sog. Hazardfunktion, ist gegeben durch

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

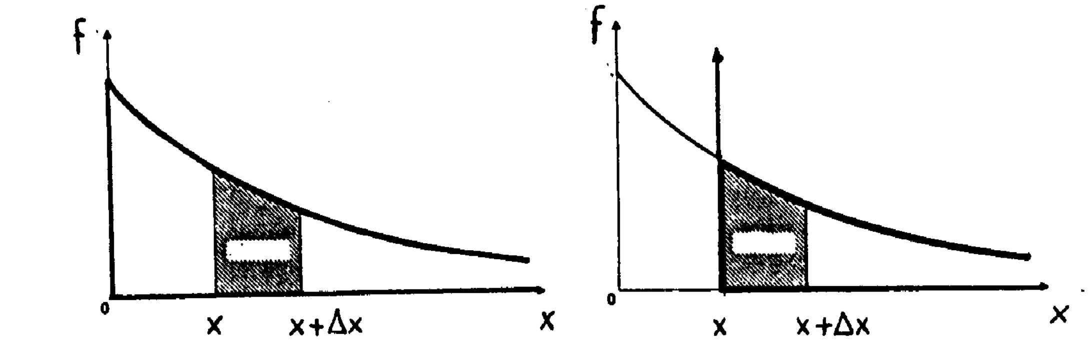

Abb. 5: Links: Ausfälle, bezogen auf alle Bauteile zu Beginn;
Rechts: Ausfälle, bezogen auf den Bestand im Alter x

Dies kann man sich anhand von Abb. 5 klar machen. So gibt die schraffierte Fläche zwischen x und $x + \Delta x$ in der links stehenden Graphik die Schätzung an, wie viele Bauteile in diesem Intervall ausfallen werden, wenn man vom Zeitpunkt 0 aus beobachtet und die Ausfälle zählt; das ist ca. $\mathrm{f}(x) \cdot \Delta x$. In der Graphik rechts wird dieselbe Fläche nicht absolut gesehen, sondern ihr Anteil am Rest der Verteilung bestimmt. Das ergibt einen Schätzwert für die Zahl der Ausfälle in diesem Zeitintervall, wenn man zum Zeitpunkt x zu beobachten beginnt und damit nur mehr jene beobachtet, die dann noch leben; dieser Schätzwert ist $\frac{\mathrm{f}(x) \cdot \Delta x}{\mathrm{R}(x)}$.

Man kann die Hazardfunktion formal durch folgenden Grenzwert festlegen:

$$\mathrm{h}(x) \;=\; \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{W}(x \le X \le x + \Delta x \;|X \ge x)$$

Für die Exponentialverteilung ergibt sich $\mathrm{h}(x) = \lambda$, dies im Einklang mit der Behauptung, sie modelliere "rein zufällige" Ausfälle. Das bedeutet: die lokale Ausfallsintensität ist konstant, der Ausfallprozeß ist daher nicht alterungsabhängig. Will man das Phänomen Alterung modellieren, reicht also die Exponentialverteilung nicht aus.

Für elektronische Bauteile gibt es durchaus alterungsbedingte Erscheinungen, wie etwa thermische Risse, die durch Wiederbelastung sich vergrößern und zum Ausfall führen. Dennoch hat die Praxis gezeigt, daß man weitgehend mit der Exponentialverteilung das Auslangen findet. Für mechanische Bauteile gibt es allerdings das Phänomen der Ermüdung, wonach nach einer Überbeanspruchung (durch Zug- oder Druckkräfte) die statische Festigkeit drastisch abnimmt. Darüber hinaus gibt es durch Reibung Materialverluste, die ein einwandfreies Funktionieren nicht mehr gewährleisten mögen. Z.B. kann eine Gebäudedecke aus Beton durch Erschütterungen durch Bauarbeiten in der Umgebung ermüden und unter normaler Belastung zusammen brechen; oder, die Räder eines Eisenbahnwaggons, der noch nicht mit Scheibenbremsen ausgestattet ist (der Bremsklotz wirkt also direkt auf die Lauffläche des Rades, werden durch Bremsmanöver ungleich abgenutzt und laufen dadurch unrund, was zu weiterer, erhöhter Abnutzung und zur erhöhten Lärmentwicklung führt.

Die in der naiven Schätzung der alterungsbedingten Ausfälle verwendete Beziehung zwischen Hazard-, Dichte- und Zuverlässigkeitsfunktion ist von allgemeiner Bedeutung und soll deshalb hier eigens festgehalten werden:

$$h(x) = \frac{f(x)}{R(x)}$$

Integriert man beide Seiten nach x über dem Intervall $[0,x_0]$, so erhält man eine Darstellung der Zuverlässigkeitsfunktion in Abhängigkeit von der Hazardfunktion:

$$R(x_0) = \exp^{-\int_0^{x_0} h(x)dx}$$

Die Hazard legt hiermit die Zuverlässigkeit und damit natürlich auch die Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - R(x)$ eindeutig fest. Für eine konstante Hazard ergibt sich durch Einsetzen tatsächlich die Exponentialverteilung.

- *Kumulierte Hazard*

Das Integral der Hazardfunktion

$$H(x) = \int_0^{x_0} h(x)dx$$

bietet zunächst eine vordergründig mathematische Vereinfachung des oben genannten Zusammenhangs zwischen Verteilungsfunktion F bzw. Zuverlässigkeit R und der Hazard; mit dieser "Abkürzung" gilt dann:

$$F(x) = 1 - e^{-H(x)}$$

Der eigentliche Grund für diesen neuen Begriff liegt aber in den Anwendungen; für den Fall, daß in den Daten von einigen Bauteilen die Ausfallzeit nicht bekannt ist (sie mußten etwa aus anderen Gründen aus der Wertung genommen werden) - man nennt diesen Umstand "mehrfache Zensierung" - kann man mit diesem Hilfsbegriff der kumulierten Hazard die (graphische) Bestimmung der Verteilungsfunktion aus den Daten recht einfach modifizieren.

- *Typen von Hazardfunktionen*

Die mathematischen Eigenschaften der Hazardfunktion erlauben eine einfache und sehr prägnante Beschreibung wichtiger Eigenschaften der Lebensdauer bestimmter Objekte. Diese Objekte können technische Bauteile sein, wie hier exemplarisch dargestellt. Diese Objekte können aber auch Menschen sein, etwa hinsichtlich ihrer Überlebenszeit nach bestimmten Operationen, dieses wichtige Anwendungsgebiet wird aber hier nicht weiter erörtert.

Abb. 6 zeigt der Reihe nach monoton fallende, monoton steigende, erst bis zu einem Maximum steigende, hernach fallende Hazard, schließlich den dazu gegengleichen Fall, dann die konstante Hazard und zuletzt eine Hazard, die erst fällt, dann eine Zeit lang konstant bleibt und schließlich steil ansteigt. Von Beginn an fallende Hazard modelliert das Phänomen der sog. "*infant mortality*" in Analogie zur Kindersterblichkeit bei der Lebensdauer von Menschen, die noch bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts große Ausmaße hatte. Steigende Hazard modelliert, analog zum Phänomen der Alterung mechanischer Bauteile, Ermüdungserscheinungen. Der Fall, daß die Hazard ein Maximum hat, scheint aus praktischen Erwägungen wenig relevant. Eine Hazard mit Minimum, speziell wenn dieses Minimum zu einem konstanten Abschnitt ausartet, ist jedoch ein häufig vorzufindender Fall, für diesen Typ ist die Bezeichnung "Badewannenkurve" geläufig. Konstante Hazard modelliert jedenfalls altersunabhängige Ausfälle.

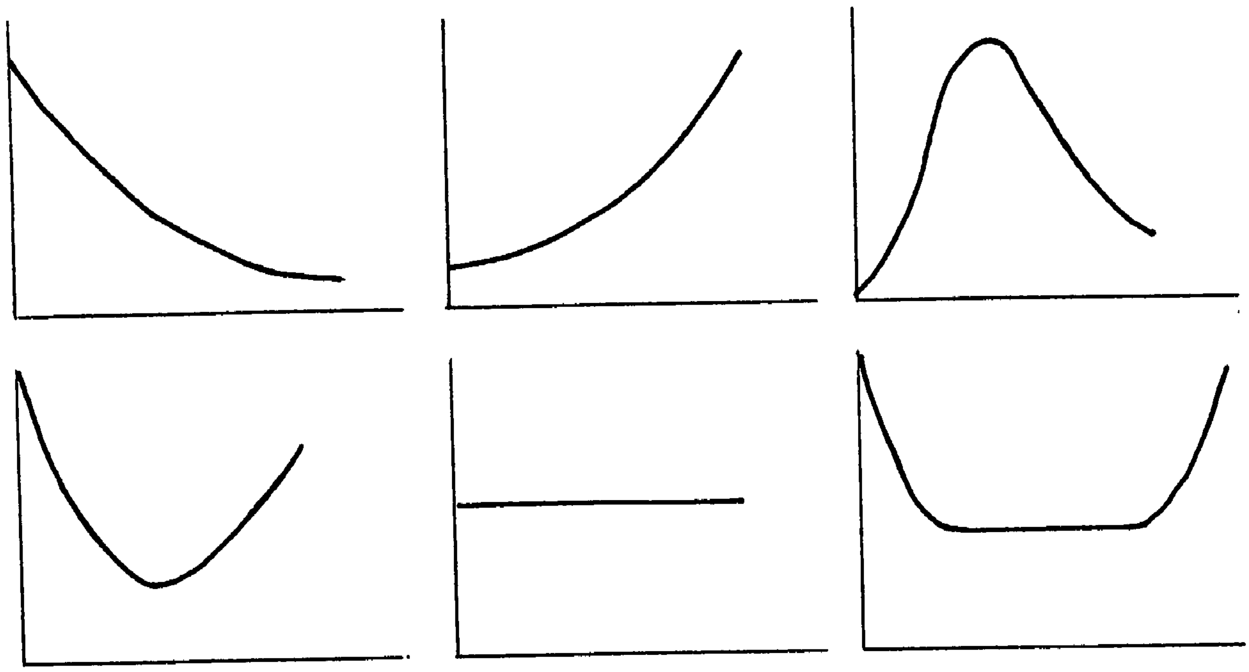

Abb. 6: Typen von Hazardfunktionen

Eine "Badewannen"-Hazard modelliert demnach ein komplexes Ausfallverhalten, das der Reihe nach folgende Eigenheiten aufweist: Zu Beginn werden die Bauteile besser, zu allererst fallen einige aus, diese bedingten Ausfälle werden aber seltener. In einem solchen Fall lohnt es sich für den Erzeuger, alle Bauteile in einer "burn in"-Phase zu testen und erst die überlebenden Teile weiter zu verarbeiten (oder zu verkaufen). Von praktischem Interesse ist dann die Phase der (beinahe) konstanten Hazard; diese stellt die gewöhnliche Nutzungsdauer der Bauteile dar, in welcher Ausfälle aus keinem besonderen Grund, also in gewissem Sinne rein zufällig passieren (siehe auch die Beschreibung des Poissonprozesses in Abschnitt 3). Man versucht, diesen Zeitraum möglichst lange zu machen, etwa durch technische Eingriffe in der Produktplanung und Fertigung (Verwendung besonderer Materialien, Einsatz bestimmter Fertigungstechniken, etwa Schweißen, Löten, Kleben etc.). Schließlich beschreibt die steil ansteigende Hazard die Phase der Ermüdung, der rasch ansteigenden Ausfälle, die für eine normale Nutzung des Bauteils i.a. nicht mehr geeignet erscheinen.

Bei elektronischen Bauteilen hat man eine sehr lange Nutzungsdauer mit konstanter Hazard feststellen können, die Anfangsausfälle (etwa bedingt durch schlechte Kontakte, Materialfehler etc.) versucht man durch eine "burn in"-Phase auszusondern. Im Produktdesign schließlich versucht man, die normale Lebensdauer durch bessere Produktplanung zu verlängern. Die Maßnahmen sind so wirksam, daß man für elektronische Bauteile meist in erster Näherung die Exponentialverteilung als Lebensdauermodell verwenden kann. Mechanische Bauteile sind i.a. durch eine viel kürzere normale Nutzungszeit und eine i.a. weniger steil ansteigende Ermüdung gekennzeichnet. Hier besteht für die Praxis der dringende Bedarf an Überprüfungstests für den tatsächlichen altersabhängigen Zustand und die Notwendigkeit, durch Wartung und Reparaturen die normale Nutzungsdauer zu verlängern.

2. Weitere Modelle in der Zuverlässigkeitstheorie

Im folgenden wird die Vielfalt der in der Zuverlässigkeitstheorie Anwendung findenden Verteilungen lediglich angedeutet. Dargestellt werden die Verteilungen jeweils durch die Hazardfunktion, diesem Schlüsselbegriff von Wahrscheinlichkeitsmodellen im Rahmen der Zuverlässigkeit. Einige theoretische Zusammenhänge werden angedeutet, damit man den Stellenwert der Modelle einigermaßen erkennen kann, für die Praxis wichtige Eigenschaften der Modelle werden angegeben, illustrative Beispiele kommen auch in Abschnitt 4.

a) Normalverteilung

Die Normalverteilung, quer über die Anwendungen insgesamt die wichtigste Verteilung, spielt in der Zuverlässigkeitstheorie eher eine untergeordnete Rolle. Ihre Anwendung gliedert sich in die zwei folgenden typischen Fälle: (i) zur Modellierung ansteigenden Ausfallverhaltens, also des Phänomens der Ermüdung; (ii) instrumentell zur rechnerischen Vereinfachung des Modells der logarithmischen Normalverteilung (siehe weiter unten). Da die Normalverteilung auch negativen Werten eine nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit zuordnet, muß man danach trachten, diesen Modellfehler (Lebensdauer sind ja auf positive Werte beschränkt) durch vergleichsweise kleine Standardabweichung im Vergleich zum Erwartungswert klein zu halten. Ist dies nicht möglich, so ist Normalverteilung kein gutes Modell. Man findet aber auch in der Familie der Weibullverteilungen ansteigende Hazardfunktionen (siehe weiter unten). Die Abb. ** zeigt eine Dichtefunktion und die entsprechende Hazardfunktion, die asymptotisch folgender Geraden gleicht:

$$h(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{x-\mu}{\sigma}$$

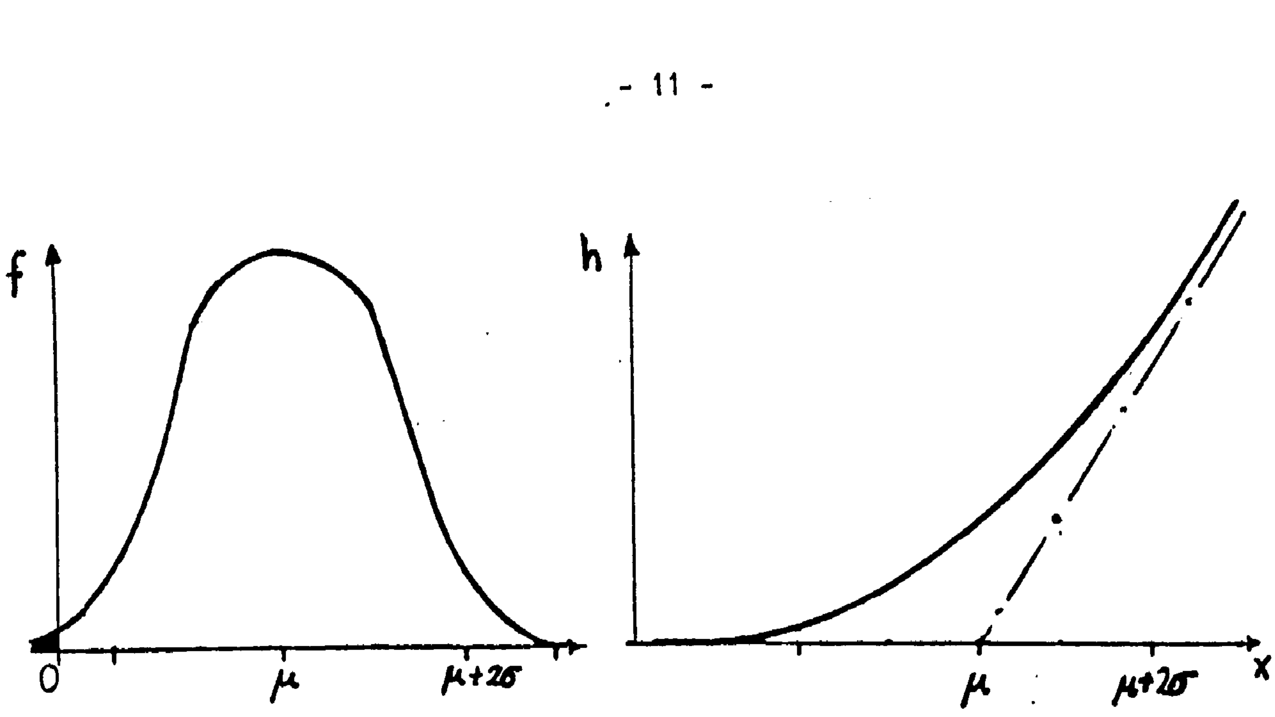

Abb. 7: Dichte und Hazardfunktion einer ausgewählten Normalverteilung

Zu beachten ist, daß die Parameter μ und σ dieselbe Dimension haben wie die Lebensdauer X.

b) Lognormalverteilung

Eine Lebensdauer X ist lognormalverteilt mit Parametern μ und σ, wenn ihr dekadischer Logarithmus, also $Y = \log X$, normalverteilt mit ebendiesen Parametern ist. Für die Analyse einer Lebensdauer mit der Lognormalverteilung sind die Dichtefunktion und andere mathematische Details dieser Verteilung nicht wichtig, denn üblicherweise logarithmiert man die Daten und erhält damit eine gewöhnliche Normalverteilung. Die Parameter μ und σ sind dabei dimensionslose Größen, welche in dieser Analyse zum Mittelwert und zur Standardabweichung der Logarithmen werden. Die folgende Abb. 8 zeigt einige ausgewählte Dichte- und Hazardfunktionen der Lognormalverteilung.

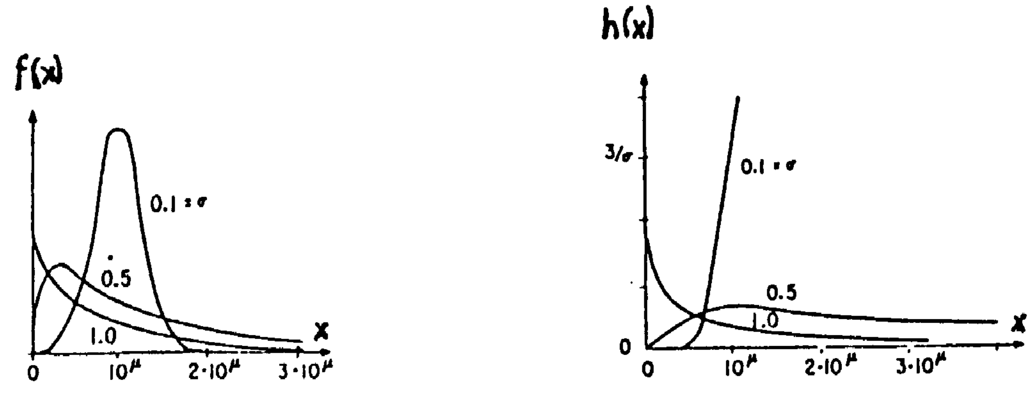

Abb. 8: Dichten und Hazardfunktionen für ausgewählte Lognormalverteilungen

Dabei bestimmt μ den 50%-Punkt der Verteilung und die Breite sowie σ die Gestalt der Verteilung. Abb. 8 zeigt, daß die Familie der Lognormalverteilungen hinsichtlich der Hazard sehr flexibel ist, man kann damit je nach dem Wert von σ steigende, fallende sowie konstante Hazard

(σ =0.5) modellieren. Wird σ <0.2, so ist die Verteilung annähernd der gewöhnlichen Normalverteilung gleich.

- *Beispiel:*

Die Lebensdauer X [in 1000 km] einer elektronischen Kontrolleinrichtung für Lokomotiven sei lognormalverteilt mit μ=2.236 und σ=0.320. Wie hoch ist der Anteil an Reklamationen zu erwarten, wenn die Garantie 80 [1000 km] betragen soll? Ist das Ausfallverhalten alterungsabhängig? Soll man erst ältere Bauteile erneuern oder ist dies egal?

Zu bestimmen ist der Wert der Verteilungsfunktion an der Stelle 80, man geht zu den dekadischen Logarithmen über und standardisiert diese, um die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus Tabellen der (0,1)-Normalverteilung mit rund 0.15 abzulesen. Dieser Wert ist sehr hoch, entweder man ändert die Garantiezeit oder das Design des Produkts oder das Produkt selbst. Da σ mit 0.32 in die Nähe von 0.2 liegt und die Normalverteilung steigende Hazard hat, ist das Ausfallverhalten alterungsabhängig, es ist daher angezeigt, ältere Teile zuerst zu tauschen (oder zu warten).

c) Weibullverteilung

Eine Lebensdauer X ist Weibull verteilt mit den Parametern α und β, wenn die kumulierte Hazard im wesentlichen eine Potenzfunktion ist:

$$H(x) = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}, \quad x>0,\ \alpha, \beta>0$$

Der Parameter α hat dieselbe Dimension wie X und ist ein Skalenparameter, der Parameter β ist dimensionslos und reguliert die Gestalt der Verteilung. Die folgende Abb. 9 zeigt einige ausgewählte Dichte- und Hazardfunktionen. Der Fall $\beta < 1$ modelliert Anfangsausfälle (fallende Hazard), $\beta = 1$ beschreibt zufällige Ausfälle (konstante Hazard), $\beta > 1$ Ermüdung (steigende Hazard).

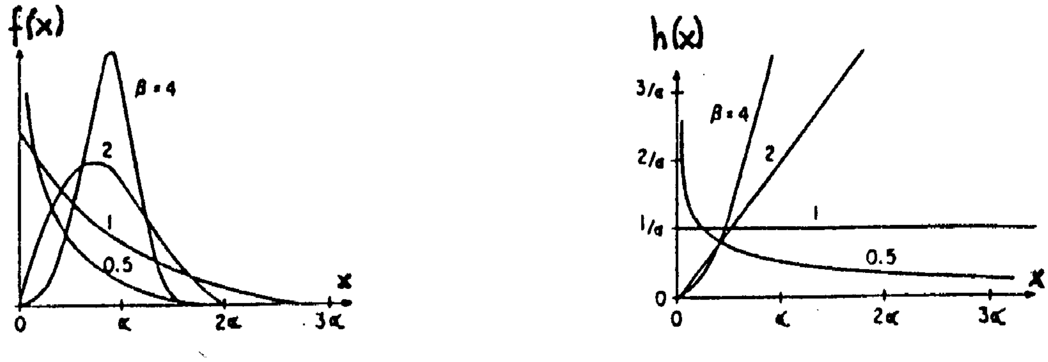

Abb. 9: Dichtefunktionen und Hazards ausgewählter Weibullverteilungen

Ähnlich wie bei der Lognormalverteilung die Normalverteilung die rechnerische Analyse vereinfacht, hilft hier der Übergang zu natürlichen Logarithmen, was hier zur sog. Extremwertverteilung führt (Details etwa in Nelson, 1982). Die Weibullverteilung ist eigentlich die Normalverteilung der Zuverlässigkeitstheorie. Zum einen ist es ihre flexible Gestalt, die steigende, fallende und konstante Hazard modellieren läßt. Zum anderen gibt es einen tiefliegenden mathematischen Satz, der die Weibullverteilung unter bestimmten Bedingungen als Grenzverteilung eines (standardisierten) Minimums von identischen Zufallsvariablen erscheinen läßt. Hat man also *n* identisch verteilte Fehlerursachen, die alle für sich zum Ausfall des Bauteils führen, so ist die Lebensdauer des Bauteils gleich der minimalen Lebensdauer im Hinblick auf die verschiedenen Ausfallursachen. Wegen des angesprochenen Grenzwertsatzes kann man unter bestimmten Bedingungen die Lebensdauer als Weibullverteilt annehmen.

3. Poissonprozeß

In der Bernoulli-Kette stellt man an den Prozeß des Entstehens von Ereignissen ganz einfache Bedingungen - gleiche Ereigniswahrscheinlichkeit bei jedem Versuch und Unabhängigkeit der Versuche voneinander, das führt zur Binomialverteilung für die Zufallsvariable Anzahl der Ereignisse bei einer festen Zahl von Versuchen. In ähnlicher Weise führen etwas komplizierter zu formulierende Forderungen an den Prozeß des Entstehens von Ereignissen im Verlaufe kontinuierlich fortschreitender Zeit zur Poissonverteilung für die Anzahl der in einem bestimmten Zeitabschnitt eintretenden Ereignisse. Dies soll hier kurz skizziert werden, nähere Details findet man z.B. in DIFF, 1984, in Meyer, 1970, oder in Fisz, 1971. Die Poissonverteilung wird üblicherweise als Näherung zur Binomialverteilung eingeführt; das allerdings verschleiert die Einsicht in manche Eigenschaft der Verteilung. Im Rahmen der Zuverlässigkeit wird der Bezug zum sog. Poissonprozeß bedeutsam; dieser bietet u.a. Gelegenheit zur Verwendung von unterrichtlicher Software zur Simulation der zugrunde liegenden mathematischen Zusammenhänge.

a) Bedingungen an den Prozeß des Entstehens von Ereignissen

Ereignisse entstehen im Verlauf der Zeit. Man kann jedoch nicht wie in der Bernoulli-Kette einen Takt ausmachen, in welchem Versuche stattfinden, die zum Ereignis führen können. Vielmehr kann man nur im "nachhinein" feststellen, daß ein Ereignis stattgefunden hat, nicht jedoch, "wann" ein Versuch zu keinem Ereignis geführt hat. Als Beispiel sei hier die Zahl der Blitze in einem Gewitter angeführt, die in einer Minute gezählt werden; es gibt, in Abhebung zur Bernoulli-Kette kein Experiment, das zu Blitz oder Nicht-Blitz führt. Folgende Forderungen an den Prozeß des Entstehens von Ereignissen führen letztlich zur Poissonverteilung für die Zählung der Ereignisse in einem bestimmten Zeitintervall (alle Überlegungen gelten auch für die räumliche Verteilung von "Ereignissen" analog):

$X_{\Delta t}$ sei jene Zufallsvariable, die die Zahl der Ereignisse im Intervall $[t,\ t+\Delta t]$ zählt.

i) Der Beginn t der Beobachtung ist egal.

ii) Proportionalität im Kleinen: Genau 1 Ereignis in der Zeitspanne Δt hat im wesentlichen die Wahrscheinlichkeit $\lambda \cdot \Delta t$, der Rest sind Fehlerterme die mit kleineren Intervallen, d.h. kleinerem Δt vernachlässigbar werden. Pro Zeiteinheit sind daher im wesentlichen λ Ereignisse zu erwarten, daher wird λ auch als Intensität des Prozesses, Ereignisse zu erzeugen, benannt.

iii) Keine zwei Ereignisse in kleinen Intervallen: Die Wahrscheinlichkeit von 2 und mehreren Ereignissen ist abhängig von der Länge der Beobachtung, jedenfalls aber im Vergleich zu Δt vernachlässigbar.

iv) Unabhängigkeit der Beobachtungen: Ereignisse vor und nach einem Zeitpunkt t sind im stochastischen Sinne unabhängig voneinander.

Die Formalisierung der Vernachlässigbarkeit von Fehlertermen erfolgt mit den Landau-Symbolen; dabei meint f ist ein o(Δt) - "f ist ein klein o von Δt", daß folgendes gilt:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

b) Anzahl der Ereignisse

Die obigen Forderungen an den Prozeß des Entstehens von Ereignissen führen mit folgenden Bezeichnungen auf ein System von Differentialgleichungen, das sich mit nicht allzu viel Mühe rekursiv lösen läßt. Sei X_t die Zahl der Ereignisse bis zum Zeitpunkt t. Die Wahrscheinlichkeit, genau k Ereignisse bis t zu registrieren, sei mit $P_k(t)$ bezeichnet. Man beachte, mehrere Ereignisse sind nur in kleinen Intervallen vernachlässigbar, nicht jedoch im Intervall [0, t].

$$\begin{aligned} P_0'(t) &= -\lambda \cdot P_0(t) \\ \dots &= \dots \\ P_k'(t) &= \lambda \cdot P_{k-1}(t) - \lambda \cdot P_k(t) \qquad k \geq 1 \\ \dots &= \dots \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung dieses Systems von Differentialgleichungen ist dann:

$$P_k'(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Das ist gerade die Poissonverteilung, nun mit dem Parameter λt, das ist gleich dem Erwartungswert, welcher nun proportional der beobachteten Zeit t und ebenso proportional zur sog. Intensität des Entstehens von Ereignissen λ ist, ein Ergebnis, das durchaus plausibel ist. Statt wie in der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit p für ein Ereignis pro Versuchsdurchführung hat man hier λ, die Intensität von Ereignissen pro Zeiteinheit, statt np erwartete Ereignisse für n Versuche hat man hier λt erwartete Ereignis sefür die Beobachtungszeit t.

c) Wartezeit bis zum nächsten Ereignis

In der Bernoulli-Kette kann man die Frage nach der Wartezeit bis zum nächsten Ereignis rasch beantworten, es ergibt sich die geometrische Verteilung (auch Pascal-Verteilung genannt), mit den Wahrscheinlichkeiten mit $\frac{1}{p}$ als Erwartungswert für die Wartezeit auf das nächste Ereignis.

$$W(\text{Wartezeit } T = k) \;=\; (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Auch die Fragen nach der Wartezeit auf das k-te Ereignis ist mit der sog. negativen Binomialverteilung nicht allzu schwer zu beantworten. Im Poissonprozeß kann man die analogen Fragen stellen, sie führen zur Exponentialverteilung (bzw. zur sog. Erlangverteilung) mit dem Parameter λ:

$$W(T>t) = P_0(t) = e^{-\lambda t}$$

Auch folgende inhaltliche Überlegung paßt: Wenn es durchschnittlich λ Ereignisse pro Zeiteinheit gibt, dann ist die durchschnittliche Wartezeit bis zum nächsten Ereignis $\frac{1}{\lambda}$, was genau dem Erwartungswert der Exponentialverteilung entspricht.

4. Vollständige und einfach zensierte Daten

Die folgenden Ausführungen müssen aus Platzmangel kursorisch gestaltet werden. Knapp wird referiert, wie die graphische Beurteilung, ob ein bestimmtes Modell für die Analyse der Lebensdauer vorliegender Daten paßt; einige Beispiele sollen hier lediglich die Vielfalt von Beispielen illustrieren, hier sei auf Nelson, 1982, verwiesen.

a) Graphische Beurteilung

Die empirische Verteilungsfunktion zeigt zu jedem Zeitpunkt, wie viele Bauteile in einem Lebensdauerversuch bis dahin schon ausgefallen sind. Diese (treppenförmige) Funktion kann direkt mit der theoretischen Verteilungsfunktion irgendeines Modells verglichen werden. Legt man die Graphen übereinander, so kann man die Anpassung nach Augenmaß oder durch ein formales Abstandsmaß (z.B. maximale Differenz) beurteilen. Der Vorteil der Methode liegt auf der Hand, die Abstände sind im Originalmaßstab einfach zu beurteilen. Der Nachteil liegt darin, daß auch mit dem Computer die Auswahl der Modelle mit den verschiedenen Parametern umständlich ist (einmal ganz davon abgesehen, daß auch die Modellfamilie, ob Normalverteilung oder Weibull etc., gar nicht festliegt), per Hand jedenfalls aber nicht zu leisten ist.

In den technischen Anwendungen hat sich daher schon in Zeiten vor dem Computer der Gebrauch von Funktionsnetzen eingebürgert, die im wesentlichen darin bestehen, daß der Maßstab (in der Ordinate oder auch in der Abszisse) so gestreckt/gestaucht ist, daß alle Verteilungsfunktionen einer Modellfamilie als unterschiedlich geneigte Geraden erscheinen. Es gibt daher ein sog. Normalpapier und ein Weibullpapier. In ein solches Papier trägt man die Ausfallzeiten und die Anzahl der Ausfälle bis dahin (die Summenhäufigkeiten) ein und erhält somit Punkte, die mehr oder weniger um eine Gerade streuen. Streuen sie wenig, so kann man eine Gerade nach Augenmaß anpassen und die Parameter des Modells schätzen. Streuen sie sehr, so ist die entsprechende Modellfamilie nicht geeignet, die Lebensdauer zu beschreiben.

Abgekürzt kann man die Vorgangsweise so beschreiben:

i) Ordne die Daten der Größe nach: $x_{(i)}$ bezeichnet das i-t-kleinste Datum

ii) Erstelle eine Tabelle

geordnete Daten	Ränge	F_i
$x_{(i)}$	i	$\frac{i-0.5}{n}$

iii) Wähle ein Modell und das entsprechende Funktionspapier

iv) Zeichne die Punkte $(x_{(i)}, F_i)$ bzw. $(\log x_{(i)}, F_i)$

v) Passe eine Gerade an

vi) Beurteile die Güte der Anpassung (Fit)

vii) Schätze die Parameter graphisch

b) Einige Beispiele

- *Beispiel: Modellierung der Lebensdauer von elektrischem Isoliermaterial durch logarithmische Normalverteilung.*

Die Temperatur hat wesentlichen Einfluß auf die Lebensdauer von elektrischem Isoliermaterial bis zum völligen Zusammenbruch. Da sich bei 180° zu wenige Ausfälle ergeben, versucht man, durch erhöhten Stress die Ausfälle zu provozieren. Letztlich sucht man die Wahrscheinlichkeit für eine Lebensdauer von 20000 [h] bei 180°. Für Temperaturen von 190, 220, 240 und 260° ergeben sich folgenden Daten, die in Abb. 10 schon im logarithmischen Lebensdauernetz eingezeichnet sind. Für 260° ergibt sich aus Abb. 10 offenbar ein Bruch in der Form des Ausfallverhaltens, die anderen Geraden passen an sich gut und ergeben nur eine Parallelverschiebung der Verteilung, also keine Veränderung der Gestalt der Verteilung, sondern lediglich ein rascheres Durchlaufen desselben Verteilungstyps. Es scheint eine "Extrapolation" auf 180° durchaus möglich.

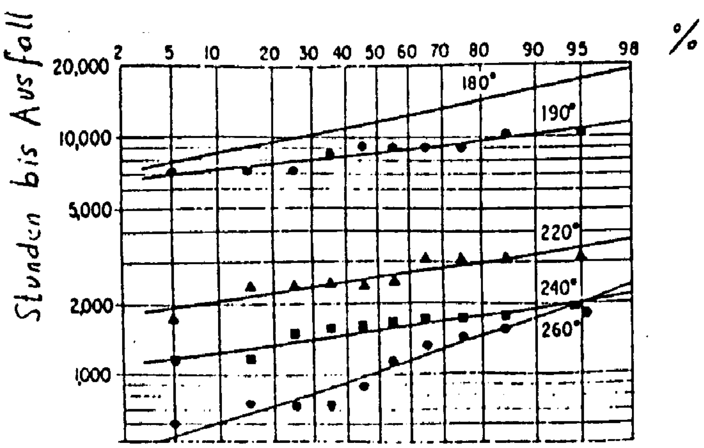

Abb. 10: Wahrscheinlichkeitsnetz für Lognormalverteilungen - Ausfallzeiten von Isoliermaterial unter verschiedenen Temperaturniveaus

- *Beispiel: Isolierflüssigkeit zwischen Elektroden bis zum Zusammenbruch mit Weibullverteilung.*

Auch hier wurden verschiedene Stressniveaus getestet, die Daten sind in Abb. 11 wiederum als Punkte, nun in einem Weibullnetz eingezeichnet. Die Geraden für die Stressniveaus 26, 30, 34 und 38 kV sind annähernd parallel. Aus der Kenntnis des Weibullnetzes könnte man entsprechend die Parameter ablesen; es ergibt sich insbesondere, daß $\beta < 1$, also daß eine Exponentialverteilung (die dem Wert 1 entspräche) nicht in Frage kommt. Die parallelen Geraden entsprechen einer Art Beschleunigung der Lebensdauer durch erhöhte Spannung; die Gestalt der Verteilung ändert sich durch erhöhten Stress offenbar kaum.

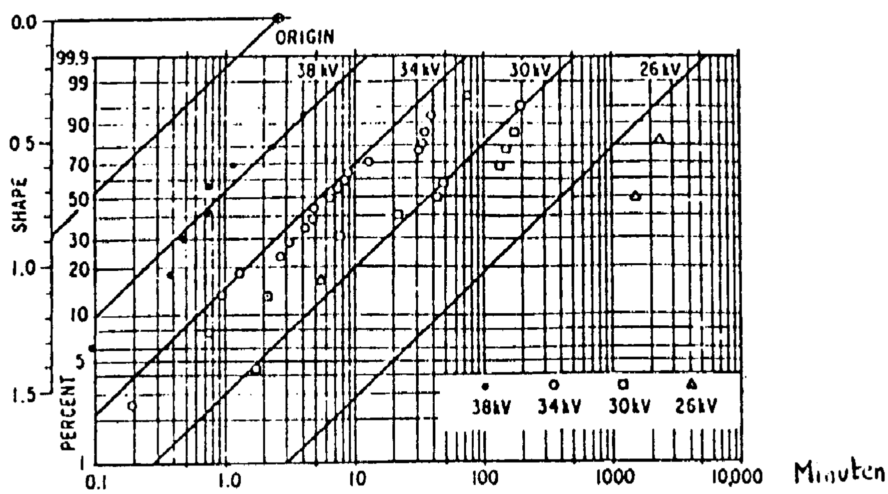

Abb. 11: Wahrscheinlichkeitsnetz für Weibullverteilungen - Ausfallzeiten von Isolierflüssigkeiten unter verschiedenen Spannungsniveaus

c) Hintergrund

Für den (gar nicht so schwierigen) Hintergrund, wieso die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsnetze funktionieren, sei auf Nelson, 1982, verwiesen. Wird der Lebensdauerversuch nach einer bestimmten Zeit oder nach einer bestimmten Zahl von Ausfällen abgebrochen, so kann man die Methode der graphischen Analyse weiterhin anwenden. Man muß aber beachten, daß man eben nur einen Anfangsteil der Verteilung damit schätzen kann. Gerade im oberen Bereich der Verteilung könnte ein bestimmter Typ der Verteilung sich ändern, oder es könnten sich die Werte der Parameter ändern. Die Situation wird umso weniger zuverlässig, je kleiner der beobachtete Zeitausschnitt aus der gesamten Verteilung ist. Hat man also etwa nur 5% tatsächliche Ausfälle bis zum Ende der Beobachtung, so wird man über den Hauptteil der Verteilung, das sind jene 95% der Bauteile, über die man lediglich weiß, daß sie am Ende der Beobachtung noch intakt waren, wenig aussagen können.

In der Praxis versucht man, solche Fälle von Extrapolationen der Verteilung durch Anwendung von erhöhten Stress zu vermeiden. Damit erreicht man, daß bis zum Ende des Lebensdauerversuchs tatsächlich ein großer Anteil der Bauteile ausgefallen ist und man daher echte und nicht zensierte Daten hat. Allerdings muß man für die weitere Analyse voraussetzen, daß sich durch erhöhten Stress die Gestalt der Verteilung nicht verändert. Man muß ferner geeignete Annahmen über die Beschleunigung der Lebensdauer in Abhängigkeit vom Stressniveau machen. Bei diesen Modellannahmen können einem Fehler unterlaufen. Man kann anhand der Daten die Plausibilität der Annahmen überprüfen. Die Vorgangsweise wird z.B. in Meeker und Hahn, 1985, illustriert.

5. Mehrfach zensierte Daten

In der Praxis tauchen häufig auch Probleme mit nicht fixen Zensierungszeitpunkten auf. Die entsprechenden Methoden zur Analyse der Verteilung der Lebensdauer werden hier knapp referiert.

a) Die mehrfache Zensur

Hat man bis zu einem gewissen Zeitpunkt alle Daten vollständig und danach weiß man nur, daß die Bauteile überlebt hat, so spricht man von einfacher Zensur der Daten. In der Praxis, insbesondere bei der Feldbeobachtung, taucht jedoch häufig der sog. mehrfachen Zensierung auf, ordnet man echte Ausfalldaten und zensierte Daten der Größe nach, so wechseln diese einander ab. Abb. 12 soll exemplarisch zeigen, wie das zustande kommen kann und was damit gemeint ist.

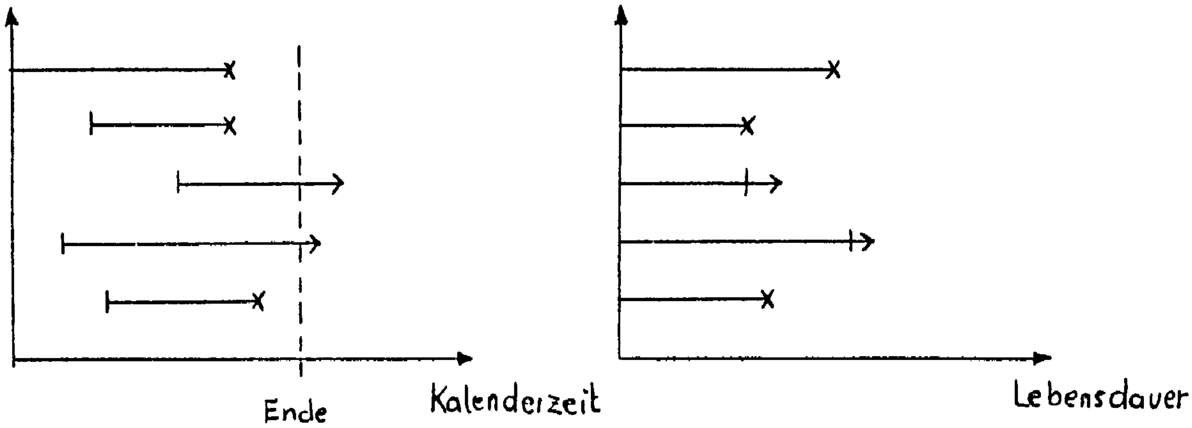

Abb. 12: Verweilkurven - kalendarische Zeit und Überlebenszeit

Abb. 12 zeigt den Verlauf der einzelnen Objekte in der Studie. Nicht alle Bauteile waren zum kalendarischen Beginn des Lebensdauerversuchs bereits im Test, manche sind erst zu verschiedenen späteren Zeitpunkten dazu gekommen. Dabei markiert x einen echten Ausfall; → markiert "überlebt und zensiert", d.h. von diesem Bauteil weiß man nur, daß es zu diesem Zeitpunkt noch intakt war, man weiß jedoch nicht, wann es wirklich ausgefallen ist. Man überträgt die kalendarische Zeit nun in eine Lebensdauer - rechte Hälfte der Abb.; diese Übertragung ist nur dann sinnvoll, wenn die Restlebensdauer nicht von den Umständen, die zur Zensur des Datums geführt haben, abhängt. Eine solche Abhängigkeit ist etwa in Zusammenhang mit der Überlebensdauer von Patienten nach einer bestimmten Operation gegeben, wenn ein Patient, der sich schlechter fühlt, nicht mehr ins Therapiezentrum kommt, und so im Verlauf der Studie verloren geht. Dann hätten nämlich die zensierten Personen eine geringere restliche Lebensdauer als jene, deren Sterbedatum in der Studie genau erhoben wurde.

b) Kumulierte Hazard

Anhand eines angedeuteten Beispiels soll die Methode erläutert werden. Von 70 Ventilatoren in einem Lebensdauerversuch hat man 12 Ausfälle und 58 zensierte Daten, die mit einem + in der folgenden Tabelle markiert sind. Die Daten, zensierte und nicht-zensierte, werden gemeinsam der Größe nach geordnet, man bestimmt der Reihe nach in den Spalten folgende Werte:

Stunden	Umgekehrter Rang k	Hazard in % = $100 \cdot \frac{1}{k}$	kumulierte Hazard
450	70	1.4 (1/70)	1.4
460+	69		
1150	68	1.5 (1/68)	2.9
1150	67	1.5 (1/67)	4.4
1560+	66		
1600	65	1.5 (1/65)	5.9
...	...	...	...

Hinweise:

- die kumulierten Hazards haben keine Deutung als Wahrscheinlichkeit, sie ergänzen sich nicht auf 1 bzw. auf 100%
- die Hazards können nur für nicht-zensierte Daten berechnet werden, dazwischen werden nur die Anzahl der dem Risiko ausgesetzten Bauteile verringert.

c) Überlebenswahrscheinlichkeiten nach Kaplan-Meier

Bei dieser Methode berechnet man nur für jene Zeitpunkte eine Überlebenswahrscheinlichkeit, die echte Ausfälle markieren. Man geht dabei rekursiv nach folgendem Schema vor:

geordnete Daten	umgekehrte Ränge	bedingte Zuverlässigkeit	*mal* Zuverlässigkeit vorher	= Zuverlässigkeit NEU
x_i	$r_i = n - i + 1$	$\frac{r_i - 1}{r_i}$	$\cdot R_{i-1}$	$= R_i$

6. Zusammenfassung

- Es sollte hier dargestellt werden, daß im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie interessante praktische Probleme auftauchen.
- Es werden neue Verteilungen zur Beschreibung erforderlich, einige neue Begriffe werfen ein verändertes Licht auf Wahrscheinlichkeit und bisher bekannte Begriffe.
- Der Einsatz von Wahrscheinlichkeitsnetzen oder von Software liegt nahe.
- Der Umgang mit mathematischen Methoden erfolgt ingenieurmäßig. Wissen und Fragen aus der Technik müssen auf der Ebene von Allgemeinwissen eingebaut werden.
- Es handelt sich bei obigen Darlegungen um keinen Lehrgang.
- Der Autor wollte Anregungen geben, wozu die Begriffe dienen, insbesondere spielt hier die Wahrscheinlichkeitsrechnung eine tragende Rolle und kann nicht (aus Zeitmangel) übergangen werden, etwa wenn man im Unterricht rasch nur zu Methoden der Beurteilenden Statistik vordringen möchte.

Literatur:

Billinton, R., Allan, R.N: *Reliability Evaluation of Engineering Systems. Concepts and Techniques*, Plenum Press, New York and London, 1983.

Borovcnik, M.: *Zuverlässigkeitstheorie*, Manuskript zu einer Vorlesung, TU Graz 1994.

DIFF: SR 3 Zentraler Grenzwertsatz, Markoff-Ketten und Warteschlangen, *Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik unter Einbeziehung von elektronischen Rechnern*, Tübingen, 1984.

Fisz, M.: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1971.

Meeker, W.Q., Hahn, G.J.: How to Plan an Accelerated Life Test, *Basic References in Quality Control: Statistical Techniques*, Vol. 10, American Society for Quality Control, Wisconsin, 1985.

Meyer, P.L.: *Introductory Probability and Statistical Applications*, Addison-Wesley, Reading, 1970.

Nelson, W.: *Applied Life Data Analysis*, J. Wiley, New York - Chichester, 1982.

Nelson, W.: How to Analyze Reliability Data, *Basic References in Quality Control: Statistical Techniques*, Vol. 10, American Society for Quality Control, Wisconsin, 1983.